TEORIA DEI SEGNALI

IL RIASSUNTO

SEGNALI

Un segnale è una qualunque grandezza fisica variabile cui è associata un informazione ed è la base di un sistema di acquisizione.

Una prima classificazoine dei segnali può essere fatta proprio in base ai valori assunti dalla variabile indipendente. Distinguiamo infatti tra:

- ***Segnali a tempo conitnuo***
  per i quali il dominio della funzione ha la cardinalità dell'insieme dei numeri reali. La variabile indipendete può assumere con *continuità* tutti i valori compresi entro un certo intervallo. In matematichese questo tipo di segnale è così rappresentato: **x(t).**
- **Segnali a tempo discreto**
  per i quali il dominio della funzione ha la cardinalità dell'insieme dei numeri interi. Tali segnali vengono chiamati in matematica *successioni* o *sequenze*. In matematichese questo tipo di segnale è così rappresentato: **x[n].**

Una classificazione analoga può essere condotta sulla base dei valori assunti dai segnali (cioè sulla base del codominio della funzione):

- **Segnali ad ampiezza continua**
  che possono assumere con continuità tutti i valori reali di un intervallo (eventualmente illimitato).
- **Segnali ad ampiezza discreta**
  aventi come codominio un insieme nuemrabile (eventualmente illimitato).

Quindi in totale possiamo distinguere un totale di 4 diversi tipi di segnali:

- **Segnali a tempo continuo e ad ampiezza continua**
  sono i cosìdetti *segnali analogici.*
- **Segnali a tempo discreto e ad ampiezza discreta**
  sono i cosìdetti *segnali digitali* o *numerici.*
- **Segnali a tempo discreto e ad ampiezza continua**
  (sequenza a valori reali) costituiscono l'oggetto delle tecniche di elaborazione numerica dei segnali utilizzati soprattutto nei DSP (Digital Signal Processing).

Il Segnale inoltre può essere periodico, ciò signifca che il segnale si ripete uguale a sè stesso dopo un periodo di tempo T_0 (per i segnali a tempo continuo) oppure N_0 (per i segnali a tempo discreto).

$x(t) = x(t + T_0)$ PERIODICITA' DI UN SEGNALE CONTINUO

$x[n] = x[n + N_0]$ PERIODICITA' DI UN SEGNALE DISCRETO

Se potessi conoscere i valori che la variabile indipendente andrà ad acquisire potrei parlare di *Segnali Deterministici,* si pensi ad esempio ad un generatore di forme d'onda di un laoratorio elettronico. Può accadere, tuttavia, che non possa conoscere i valori della variabile indipendete, in questo caso parliamo di *Segnali Aleatori*.

Propreita elementari dei segnali determinati

Al segnale x(t) è associata una potenza istantanea $x^2(t)$. L'energia del segnale è ricavata, quindi, andando ad integrare la potenza

$$E_x = {}_{-\infty}^{+\infty} \; x(t)\;^2\, dt$$

Anche al segnale x[n] è associata una potenza istantanea $x^2[n]$. L'energia del segnale è ricavata, quindi, andando ad integrare la potenza

$$E_x = {}_{n=-\infty}^{+\infty} \; x[n]\;^2$$

Per tutti i segnali, l'integrale (o sommatoria) che definisce l'energia risulta convergente, poichè ogni segnale proveniente da un sistema fisico è portatore di energia finita. Tuttavia il concetto di potenza istantanea può portare a delle incogruenze per questo introduciamo il concetto di potenza media. La potenza media del segnale x(t) valutata sull'intervallo di osservazione [-T/2, T/2] è per definizione pari all'energia di x(t) rapportata alla durata dell'intervallo stesso.

$$P_x = lim_{T\to\infty} \frac{Ex}{T} = lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \; {}_{-T/2}^{T/2} \; x(t)\;^2\; dt$$

Osserviamo che un segnale a energia finita ha Potenza media nulla; viceversa, un segnale che abbia un valore finito diverso da zero della Potenza media ha necessariamente energia infinita.

SEGNALI PERIODICI A TEMPO CONTINUO

Introduciamo in questo capitolo l'analisi di Fourier dei segnali periodici. Fourier fa una grande scoperta, infatti riesce a dimostrare che un segnale può essere sintetizzato sommando "infinitamente" un certo numero di componenti sinusoidali elementari con frequenza (f) e fase (ϑ) diverse.

$$x(t) = A_0 + A_1 \cos(2\pi f_1 t + \vartheta_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \vartheta_2) + \ldots\ldots + A_k \cos(2\pi f_k t + \vartheta_k)$$

Scritta nella forma Polare:

$$x(t) = A0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi f_k t + \vartheta_k)$$

Tuttavia la formula di Fourier scritta in questo modo non ci aiuta molto nei calcoli, per questo mi avvalgo delle formule di Eulero per il seno e il coseno andando così a ri-scrivere Fourier nella forma complessa

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

EQUAZIONE DI SINTESI
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi kft}$
EQUAZIONE DI ANALISI
$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, e^{-j2\pi kft}\, dt$

Dunque, ogni segnale x(t) che soddisfi il criterio di Dirichlet può essere rappresentato con lo sviluppo in serire di Fourier dalle equazioni di analisi e di sintesi. L'equazione di analisi mi permette di stabilire qual è il contenuto in termini di oscillazioni armoniche del segnale, mentre l'equazione di sintesi permette di ricostruire, cioè di *sintetizzare* il segnale dato. Si può notare che l'equazione di sintesi necessita di un numero di armoniche infinito per ricostruire il segnale. D'altronde, condizione necessaria alla convergenza della serie è che l'ampiezza delle armoniche tenda a zero quando k -> ∞. Questo comporta che le armoniche più importanti ai fini della sintesi del segnale sono in numero limitato. Le equazioni di analisi e di sintesi permettono di stabilire una corrispondenza tra il segnale x(t) e la sequenza delle X_k. Indicheremo tale corrispondenza con tale scrittura:

$$x(t) \Leftrightarrow X_k$$

Questo tipo di notazione suggerisce che la conoscenza dell'andamento del segnale x(t) in ambito temporale è di fatto **equivalente** alla conoscenza della successione dei coefficienti di Fourier X_k in ambito frequenziale. La sequenza X_k in generale è complessa, infatti, per rappresentarla è conveniente tracciare due grafici che prendono il nome di *spettro di ampiezza* e *spettro di fase*. Questi spettri sono a righe, cioè discreti, in quanto sono definiti solo in corrispondeza delle frequenze armoniche, che formano appunto una successione discreta.

Ora la domanda da porsi è: ma quando posso applicare Fourier? La risposta ce la dice Dirichlet

- Se x(t) è assolutamente itegrabile sul periodo T, cioè se ${}_{-T/2}^{T/2}\, x(t)\ \mathrm{dt} < \infty$
- Se x(t) è continua o presenta in un periodo un numero finito di discontinuità di prima specie
- Se x(t) è derivabile rispetto al tempo nel periodo, escluso al più un numero finito di punti nei quali esistono finite la derivata destra e sinistra

Allora la serie di Fourier converge al valore assunto dalla funzione x(t) nei punti in cui questa è continua e alla semisomma dei limiti destro e sinistro nei punti in cui x(t) presenta le eventuali discontinuità di prima specie.

Proprietà

- **Simmetria**
  Lo spettro di ampiezza è simmetrico rispetto alla frequenza, mentre lo spettro di fase non lo è.
- **Linearità**
  Se il segnale in ingresso è composizione lineare di una coppia di segnali periodici, aventi lo stesso periodo

$$z(t) = a\, x(t) + b\, y(t)$$

il coefficiente k-esimo della seire di Fourier è

$$Z_k = a\, X_k + b\, Y_k$$

SEGNALI APERIODICI A TEMPO CONTINUO

Questi tipi di segnali, lo dice il nome stesso, non variano in continuità, sono l'inverso quindi dei segnali *periodici.* La domanda che ci andiamo a porre è se per questi tipi di segnali è possibile applicare Fourier. La risposta è SI. L'idea è quella di considerare il segnale aperiodico come periodico, prendendo come periodo l'intero segnale. Quindi prendiamo l'equazione di sintesi per i segnali periodici con la clausola che T->∞. Questo limite fa in modo di portare la sommatoria al limite che per definizione si trasforma in integrale, quindi passiamo da sommatoria ad integrale di Fourier.

EQUAZIONE SINTESI
$x(t) = {}_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$
EQUAZIONE ANALISI
$X(f) = {}_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

L'equazione di Sintesi, quindi, permette di rappresentare il segnale come sovrapposizione di segnali elementari, mentre l'equazione di analisi permette di determinare il peso che le varie componenti frequenziali (a tutte le possibili frequenze variabili con continuità da -∞ a +∞) hanno nella composizione di x(t). Anche per questo tipo di segnale vale la relazione

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

Dire di conoscere il segnale in ambito frequenziale è uguale a dire di conoscere il segnale in ambito temporale. La X(*f*) può essere rappresentata attraverso lo spettro di fase (ϑ(*f*)) e di ampiezza (A(*f*))

$$X(f) = A(f)\, e^{j\vartheta(f)}$$

Per questi tipi di segnali quando posso applicare Fourier? Una prima condizione mi indica che posso applicare Fourier se e solo se il segnale ha energia finita.

$$E = {}_{-\infty}^{+\infty} x(t)^{2}\, dt < \infty$$

ma anche qui ci viene in contro Dirichlet

- Se il segnale x(t) è assolutamente sommabule, ovvero $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ \mathrm{dt} < \infty$
- Se in qualunque intervallo finito $t_1 \le t \le t_2$ il segnale x(t) ha un nuemro finito di discontinuità di prima specie
- Se in qulunque intervallo finito $t_1 \le t \le t_2$ il segnale x(t) ha un numero finito di massimi e minimi

Allora il segnale è rappresentabile come integrale di Fourier e nei punti di discontinuità l'integrale di Fourier converge alla semisomma dei limiti destro e sinistro del segnale.

Proprietà

- **Teorema di linearità**
  Se ho il segnale come combinazione lineare di due segnali y(t) e z(t)

  $$x(t) = a\, y(t) + b\, z(t)$$

  con *a* e *b* costanti. La trasformata di Fourier di x(t) è allora

  $$X(f) = a\, Y(f) + b\, Z(f)$$

- **Teorema di dualità**

  $$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

  allora

  $$X(t) \Leftrightarrow x(-f)$$

- **Teorema del ritardo**

  Se applico un ritardo (t_0) al segnale in ingresso, nell'ambito frequenziale ottengo una modulazione del segnale

  $$x(t-t_0) \Leftrightarrow X(f)\, e^{-j2\pi ft}$$

  Questa proprietà mostra inoltre che un ritardo temporale modifica lo spettro di fase della trasformata del segnale ma non cambia il suo spettro di ampiezza.

- **Teorema della modulazione**
  Se applico una modulazione al segnale in ingresso, nell'ambito frequenziale ottengo una traslazione in frequenza

$$x(t)\, e^{j2\pi f t} \Leftrightarrow X(f - f_0)$$

- **Teorema del prodotto**
  Se ho in ingresso un segnale che è dato dal prodotto di altri due segnali

$$z(t) = x(t)\, y(t)$$

  in ambito frequenziale si produce con un *integrale di convoluzione*

$$Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

  Riassumendo

$$x(t)\, y(t) \Leftrightarrow X(f) \otimes Y(f)$$

- **Teorema della convoluzione**
  Consideriamo il caso inverso del precedente teorema, cioè se in ingresso ho un segnale che è dato dall'*integrale di convoluzione* di altri due segnali, in abmito frequenziale si produce con un semplice prodotto

$$x(t) \otimes y(t) \Leftrightarrow X(f)\, Y(f)$$

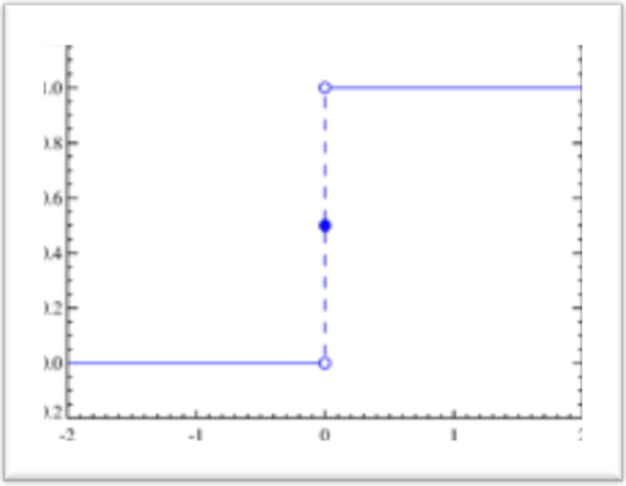
  questo teorema gode della proprietà associativa

$$[x(t) \otimes y(t)] \otimes z(t) = x(t) \otimes [y(t) \otimes z(t)]$$

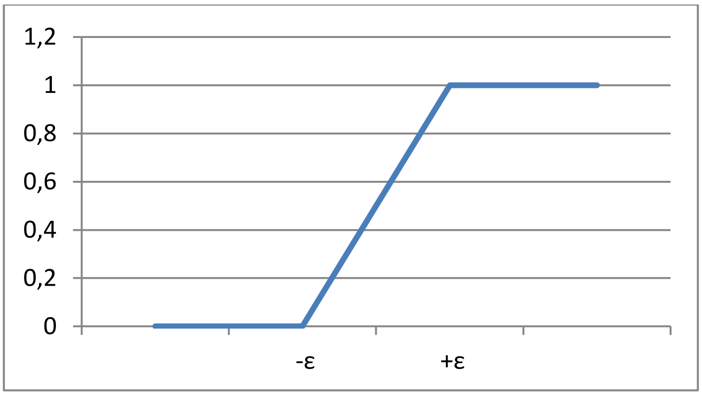
  distributiva rispetto alla somma

$$z(t) \otimes [x(t) + y(t)] = z(t) \otimes x(t) + z(t) \otimes y(t)$$

TRASFORMATE DI FOURIER GENERALIZZATE



La funzione gradino (funzione impulsiva o δ di Dirac) che vediamo nell'immagine sopra è particolare, in quanto non posso applicare Fourier a causa della sua non integrabilità. Il problema lo risolvo andando a sottolineare il fatto che tale funzione è solo un astrazione matematica che nella realtà non esiste. Infatti avremo un comportamento del genere:



L'andamento del gradino durante l'intervallo di "salita" (- ε, +ε) è stato preso lineare per semplicità. Dall'immagine segue:

$$u(t) = lim_{\epsilon \to 0} \; {}_{-\infty}^{+\infty} \, \delta_{\varepsilon}(\alpha) \, d\alpha$$

Osserviamo che riducendo il valore del parametro ε, ossia riducendo il tempo di salita del segnale, si ottiene una approssimazione sempre migliore del gradino ideale, ma soprattutto possiamo osservare che ora è possibile applicare Fourier.

Proprietà

- δ(t) è pari
- Proprietà campionatrice

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = x(t_0)$$

- Elemento neutro

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\delta(t - \alpha)\,d\alpha = x(t) \otimes \delta(t)$$

Applicando Fourier mi accorgo che la trasformata è uguale alla costante 1

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-2j\pi f t}\,dt = e^{-2j\pi f t}, t=0 = 1$$

Quindi

$$x(t) = 1 \Leftrightarrow \delta(-f) = \delta(f)$$

Questo risultato mostra che l'introduzione delle funzioni generalizzate permette di calcolare la trasforata di Fourier di un segnale a *energia infinita* come il segnale costante. Inoltre grazie a questa proprietà riesco a calcolare Fourier per funzioni alle quali prima mi era impossibile, andiamo a vedere un esempio: il seno e il coseno.

$$e^{j2\pi f t} = 1\, e^{j2\pi f t} \Leftrightarrow \delta(f - f_0)$$

Quest'ultima relazione permette poi di calcolare la trasformata continua di Fourier di un'oscillazione cosinusoidale:

$$x(t) = \cos(2\pi f t) = \frac{e^{j2\pi f t} + e^{-j2\pi f t}}{2} \Leftrightarrow \frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}$$

e per un onda sinusoidale:

$$x(t) = \sin(2\pi f t) = \frac{e^{j2\pi f t} - e^{-j2\pi f t}}{2j} \Leftrightarrow \frac{\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)}{2j}$$

SISTEMI MONODIMENSIONALI A TEMPO CONTINUO

Sistemi: sistema che produce o elabora un segnale.

Monodimensionale: un qualunque dispositivo che produce **un solo** segnale di uscita in corrsipondenza di **un solo** segnale di ingresso.

Tempo continuo: il segnale in ingresso è a tempo continuo.

Dal punto di vista matematico, un sistema è una trasformazione che ad un segnale in ingresso x(t) fa corrispondere un ben determinato e unico segnale d'uscita y(t).

$$y(t) = \Gamma[x(\alpha); t]$$

Proprietà

- **Stazionareità**
  Se le caratteristiche del sistema non variano nel tempo, il sistema è stazionario
  $\Gamma[x(t - t_0)] = y(t - t_0)$
- **Causalità**
  Un sistema è causale quando il valore dell'uscita all'istante arbitrario generico t dipende soltanto dai valori assunti dall'ingresso agli istanti precendenti
  $y(t) = \Gamma[x(\alpha), \alpha \leq t; t] = \Gamma[x(\alpha)u(t - \alpha); t]$

  La causalità dei sistemi sembrerebbe quindi una proprietà scontata. In realtà possiamo introdurre un'ulteriore distinzione: si dice che un sistema opera in un *tempo reale* se produce il segnale di uscita contestualmente alla presentazione di quello d'ingresso. Se invece l'uscita viene fornita dal sistema solo successivamente all'acquisizione comleta del segnale di ingreso, si dice che il sistema opera in *tempo virtuale*.

Un caso particolare di sistema causale è il cosìdetto sistema *istantaneo* in cui l'uscita all'istante *t* dipende solamente dal valore dell'ingresso al medesimo istante

$$y(t) = \Gamma[x(\alpha), \alpha = t; t]$$

In questo caso si usa anche la dizione di sistema *senza memoria.*

- **Stabilità**
  Un sistema è stabile se, sollecitato da un segnalecon andamento arbitrario ma di ampiezza limitata, produce a sua volta in uscita un segnale di ampiezza limitata
  $|x(t)| \leq M \Rightarrow |y(t)| \leq K$
- **Invertibilità**
  In molti casi è necessario ricostruire il segnale di eccitazione in ingresso a un sistema nota la risposta del segnale stesso. Questa operazione è possibile solo per i sistemi invertibili, per i quli cioè esiste un sistema inverso Γ^{-1} []
  $\Gamma^{-1}[y(t)] = x(t)$
- **Linearità**
  Un sistema è lineare se ad esso è applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti
  $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$

  $y(t) = \Gamma[x(t)] = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

Un tipico sistema che gode di queste proprietòà è l'amplificatore ideale.

Prendiamo ora in considerazione i sistemi SLS (Sistemi - Lineari - Stazionari) in quanto sono semplici da analizzare e possono essere sintetizzati con altrettanta facilità.

Per un SLS dato è possibile misurare la *risposta impulsiva*, cioè l'uscita del sistema in corrispondenza all'eccitazione impulsiva $x(t) = \delta(t)$. Convenzionalmete tale segnale viene indicato con h(t).

$$h(t) = \Gamma[\delta(t)]$$

L'importanza della risposta impulsiva di un SLS risiede nel fatto che la sua conoscenza permette di detrminare la risposta del sistema a un segnale di ingresso di andamento arbitrario, inoltre, caratterizza completamente il comportamento del sistema stesso.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, h(t - \alpha)\, d\alpha = x(t) \otimes h(t)$$

Sia la stabilita che la casualità del sistema posso essere definite dall'andamento della risposta impulsiva.

Tuttavia può accadere che non sia possibile o che non sia conveninete applicare al sistema una sollecitazione impulsiva. Cambiamo dunque tipo di eccitazione e forniamo in ingresso un segnale sinusoidale andando così a conoscere la *risposta in frequenza.* Quest'ultima la possiamo ricavare in 3 diversi metodi.

1 $H(f) = \frac{y(t)}{x(t)}$ con $x(t) = e^{j2\pi ft}$

2 facendo la trasformata di Fourier della risposta impulsiva

3 $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$ cioè dal rapporto delle trasformate

Tramite i sistemi posso anche andare a definire la potenza e l'energia del segnale, il tutto grazie alla densità spettrale di potenza, la denista spettrale di energia e il teorema di Wiener – Khintchine. Andiamo per ordine, che cosa è la densità spettrale di energia? Ce lo dice Perseval, infatti questi ha dimostrato la seguente ugualianza

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df$$

$|x(t)|^2$ è la potenza del segnale, mentre $|X(f)|^2$ non è altro che la densità spettrale di energia. La densità spettrale di potenza la ottengo nello stesso modo di come ottengo la potenza media e cioè

$$P(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X(f)|^2}{T}$$

Gli spettri di densità di energia e di potenza definite precedentemente possono essere calcolati in una maniera alternativa tramite il terorema di Wiener – Khintchine. Il teorema dice che posso ricavarmi gli spettri andando a calcolare la trasformata di Fourier delle rispettive equzioni di autocorrelazione. La funzione di autocorrelazione fornisce informazioni utili sulla rapidità di variazione del segnale x(t):

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x(t - \tau)\, d\tau$$

Quindi posso calcolare sia l'energia che la potenza del segnale semplicemente andando a fare la trasformata di Fourier dell'equazione di autocorrelazione e successivamente integrando la soluzione.

Un uso tipico dei sistemi SLS sono i Filtri, questi sono dispositivi che vengono utilizzati per "modificare" il segnale. I filtri che visualizzeremo sono 4:

- **Filtro Passa – Basso**
  Fa passare tutte le frequenze del segnale in ingresso tranne quelle superoiori ad una determinata soglia. La risposta in frequenza di tale dispositivo è: $h_{LP}(t) = 2B\ \mathrm{sinc}(2Bt)$.

- **Filtro Passa – Alto**
  Fa passare tutte le frequenze del segnale in ingresso tranne quelle inferiori ad una determinata soglia. La risposta in frequenza di tale dispositivo è: $h_{HP}(t) = \delta(t) - 2B\ \mathrm{sinc}(2Bt)$.

- **Filtro PassaBanda**
  Fa passare tutte le frequenze del segnale in ingresso solo se comprese tra un intervallo ben determinato. La risposta in frequenza di tale dispositivo è: $h_{BP}(t) = 2B\ \mathrm{sinc}(Bt) \cos(2\pi ft)$.

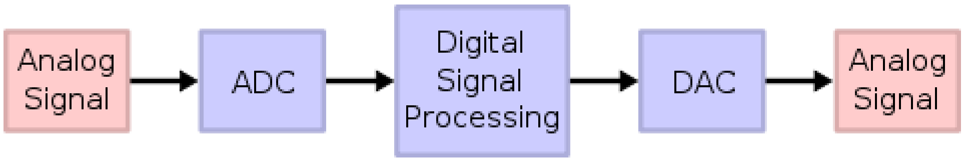
- **Filtro Notch**
  Fa passare tutte le frequenze del segnale tranne in ingresso tranne quelle comprese tra un intervallo ben determinato. La risposta in frequenza di tale dispositivo è: $h_{BP}(t) = \delta(t) - 2B\ \mathrm{sinc}(Bt) \cos(2\pi ft)$.

DECIBEL

Il decibel (simbolo **dB**) è un decimo di Bel (simbolo **B**), queste misure sono adimensionali (rapporto tra grandezze dello stesso tipo). Sostanzialmente è il rapporto tra la grandezza da misurare e la grandezza di riferimento. Tale misura deve essere in logaritmo perchè una proprietà indispensabile alla definizione di una misura è la sua additività. Ad esempio se il rapporto fra una grandezza A ed una grandezza omogenea B è 10, ed il rapporto tra B e una terza grandezza C è ancora 10, il rapporto fra A e C non è 20, bensì 100. Definendo quindi, la misura di un rapporto come il suo logaritmo si ottiene una quantità additiva.

SEGNALI A TEMPO DISCRETO

Nel mondo relae questi tipi di segnali non esistono, in quanto il mondo che ci circonda è analogico. Dove li troviamo quindi? La risposta è nei componenti elettronici. Il segnale discreto viene ricavato dal segnale analogico attraverso un operzione di conversione analogico – digitale chiamata *campionamento*.



Nella figura sopra vediamo che il segnale analogico in ingresso entra nell'ADC, qui viene digitalizzato e mandato in input al DSP che elaborerà in funzione del programma che costruirò il segnale. Successivamente, se il programma lo richiede (ad esempio registare e ascolatre audio), il segnale in uscita al DSP viene riconvertito in analogico. Andremo quindi ad interessarci a due punti fondamentali: l'ADC e il DAC. Nell'ADC avviene la fase di conversione analogico-digitale grazie alla campionatura. Campionare un segnale x(t) significa "estrarre" dal segnale stesso i valori che esso assume a istanti temporali equispaziati, cioè multipli di un intrevallo T detto periodo di campionamento.

$$x[n] = x(nT)$$

Nel DAC invece il segnale uscente dal DSP viene ricostruito in analogico grazie all'*interpolatore.* Anche per questi tipi di segnali posso applicare Fourier.

EQUAZIONE SINTESI
$X(f) = \;{}^{\infty}_{n=-\infty} x[n]e^{-2j\pi nfT}$
EQUAZIONE ANALISI
$x[n] = T \;{}^{T/2}_{-T/2} X \;\; f \;\; e^{j2\pi nfT}\, df$

Ma che significato ha fare la trasformata di Fourie di un segnale discreto? Per rispondere a questa domanda ci aiuta Nyquist. Questi ci indica che la trasformata di una sequenza ottenuta per campionamento si ricava come la **periodicizzazione della trasformata del segnale analogico di partenza**. Vediamo più in dettaglio.

Riprendiamo in considerazione il campionamento di un segnale a tempo continuo x(t).

$$x[n] = x(nT)$$

cerchiamo di determinare le conseguenze in ambito frequenziale di qeusta relazione valida in ambito temporale.

$${}^{\infty}_{n=-\infty} x[n]e^{-2j\pi nfT} = X(f) = \;{}^{\infty}_{n=-\infty} x(nT)\; e^{-2j\pi nfT}$$

Esprimiamo i campioni del segnale a tempo continuo x(t) attraverso l'integrale di Fourier valutato all'istante t = nT:

$$X(f) = \;{}^{\infty}_{n=-\infty}(\;{}^{\infty}_{-\infty} X \;\; v \;\; e^{j2\pi vnT}) \; e^{-j2\pi nfT} =$$

$$= \;{}^{\infty}_{-\infty} X \;\; v \quad {}^{\infty}_{n=-\infty} e^{-j2\pi n(f-v)T}\, dv$$

Per semplificare la relazione sostituisco

$${}^{\infty}_{n=-\infty} e^{-2j\pi nfT} = \frac{1}{T} \quad {}^{\infty}_{k=-\infty} \delta \;\; f - \frac{k}{T}$$

quindi si ha

$$X(f) = \;{}^{\infty}_{-\infty} X \;\; v \;\; \frac{1}{T} \quad {}^{\infty}_{k=-\infty} \delta \;\; f - v - \frac{k}{T} \;\; dv$$

$$\frac{1}{T} \quad {}^{\infty}_{k=-\infty} \quad {}^{\infty}_{-\infty} X \;\; v \;\; \delta(v - (f - \frac{k}{T})\, dv$$

Sfruttando infine la proprietà campionatrice della funzione δ si ottiene

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T})$$

Questa relazione mostra, quindi, che la trsformata di Fourier di una sequenza ottenuta per campionamento si ricava come la periodicizzazione della trasformata del segnale analogico di partenza, con un periodo di ripetizione pari alla frequenza di campionamento. Tale frequenza deve essere almeno ≥ 2B (B = banda del segnale in ingresso) altrimenti introdurrei fenomenri di *Aliasing.*

Una volta elaborato il segnale potrebbe essere necessario riconvertire il segnale discreto in analogico. Per fare ciò mi avvalgo del segnale interpolante. Andiamo a vedere 2 tipologie di segnali interpolanti:

- **interpolatore a mantenimento**
  per costruire il segnale analogica di uscita, il valore n-esimo della sequenza d'ingresso x[n] viene mantenuto a partire dall'istante nT e fino a che non sia disponibile il prossimo valore.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\ p(t - nT)$$

- **interpolatore cardinale**
  prendo il segnale interpolante in modo che la sua trasformata valga costante all'iterno dell'intervallo [-1/2 T, 1/2T] e nulla al di fuori**.**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\ sinc(\frac{t-nT}{T})$$

<u>Proprietà **(ometto le dimostrazioni per i teoremi già visti in precedenza)**</u>

- **Teorema di linearità**
- **Teorema del ritardo**
- **Teorema della modulazione**
- **Teorema della somma di convoluzione**
  Prima di introdurre questa porprietà introduciamo la sequenza z[n] somma di convoluzione tra le sequenza aperiodiche x[n], y[n]:

$$z[n] = x[n] \otimes y[n] \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\ k\ y\ n-k$$

Il teorema afferma che la trasformata di Fourier della sequenza z[n] è data dal prodotto delle trasformate delle sequenze x[n] e y[n]

$$z[n] = x[n] \otimes y[n] \Leftrightarrow X(f)\, Y(f) = Z(f)$$